

Interpolation und numerische Differentiation

WILHELM FORST^{*,*}

*Fakultät für Mathematik der Universität,
Postfach 5560, D-7750 Konstanz, West Germany*

Communicated by P. L. Butzer

Received April 6, 1982

Let $L_n f \in \Pi_n$, $n \in \mathbb{N}$, denote the polynomial interpolating a given function $f \in C^1[-1, 1]$ at the extremum points $z_j = \cos(j\pi/n)$, $0 \leq j \leq n$, of the n th Chebyshev polynomial. Then, with respect to the Chebyshev norm on $C[-1, 1]$, the estimate

$$\|f' - (L_n f)'\| \leq (1 + \lambda_n) E_{n-1}(f')$$

holds, where the Lebesgue constant λ_n is the maximum of a generalized Lebesgue function A_n which was introduced by Schönhage. It turns out that A_n attains its maximum value

$$\lambda_n = 2 \tan \frac{\pi}{2n} \sum_{j=1}^{n-1} \cot \frac{j\pi}{2n}$$

exactly at the endpoints of the interval $[-1, 1]$. The Lebesgue constants satisfy

$$\lambda_n = 2 \log n + e_n,$$

in which e_n decreases monotonically to $2(C + \log(2/\pi)) = 0.2512 \dots$, where $C = 0.5772 \dots$ is Euler's constant. This improves earlier results by Schönhage, *Math. Z.* **94** (1966), 79–83, and Haverkamp, *J. Approx. Theory* **30** (1980), 180–196.

1. EINLEITUNG

Zu gegebenen Interpolationsknoten $-1 = z_n < z_{n-1} < \dots < z_1 < z_0 = 1$ betrachten wir den Lagrangeschen Interpolationsoperator $L_{n,0}$, der den Raum $C[-1, 1]$ auf den Unterraum Π_n der Polynome vom Grade $\leq n$ abbildet. Wie üblich hat $L_{n,0}$ die Darstellung

* Der Autor dankt Herrn Max Widmann für die Herstellung der Zeichnung (Abb. 1) auf der Rechenanlage der Universität Konstanz sowie für den Hinweis auf die Beziehung (b) in Satz 2.

[†] Present address: Abteilung Mathematik IV der Universität, Oberer Eselsberg, D-7900 Ulm, West Germany.

$$(L_{n,0}f)(z) = \sum_{j=0}^n f(z_j) l_j(z), \tag{1}$$

$$l_j(z) = \frac{\omega(z)}{\omega'(z_j)(z - z_j)}, \quad \omega(z) = \prod_{i=0}^n (z - z_i). \tag{2}$$

Legt man die Tschebyscheff-Norm

$$\|f\| := \max_{|z| \leq 1} |f(z)|$$

zugrunde und bezeichnet \hat{z} das Auswertungsfunktional $\hat{z}f := f(z)$, so liefert die durch

$$A_{n,0}(z) := \sum_{j=0}^n |l_j(z)| \tag{3}$$

definierte Lebesguefunktion die Abbildungsnormen

$$\|\hat{z}L_{n,0}\| := \sup_{|f| \leq 1} |(L_{n,0}f)(z)| = A_{n,0}(z) \tag{4}$$

und

$$\|L_{n,0}\| := \sup_{|f| \leq 1} |L_{n,0}f| = \max_{|z| \leq 1} A_{n,0}(z). \tag{5}$$

Mit Hilfe der Lebesguefunktion erhält man die bekannten Abschätzungen

$$|f(z) - (L_{n,0}f)(z)| \leq (1 + A_{n,0}(z)) E_n(f) \tag{6}$$

und

$$|f - L_{n,0}f| \leq (1 + \|L_{n,0}\|) E_n(f) \tag{7}$$

für den punktweisen bzw. globalen Interpolationsfehler.

Nach einem Ergebnis von Erdős [4], verschärft durch Brutman [1], gilt für beliebige Knoten

$$\|L_{n,0}\| \geq \frac{2}{\pi} \log n + 0.5212\dots \tag{8}$$

Andererseits haben Ehlich und Zeller [3] sowie Rivlin [10] für die Extremstellen $z_j = \cos(j\pi/n)$, $0 \leq j \leq n$, des Tschebyscheff-Polynoms T_n die Abschätzung

$$\|L_{n,0}\| \leq \frac{2}{\pi} \log n + 1 \tag{9}$$

nachgewiesen.

Im folgenden untersuchen wir die analoge Fragestellung für Projektoren, die bei numerischer Differentiation auftreten. Und zwar definieren wir $L_{n,1}: C[-1, 1] \rightarrow \Pi_{n-1}$ für $g \in C[-1, 1]$ mittels $L_{n,1}g := (L_{n,0}f)'$, wobei f eine beliebige Stammfunktion zu g ist. Man überlegt sich leicht, dass $L_{n,1}$ eindeutig definiert sowie ein linearer Projektor auf Π_{n-1} ist. Mit der verallgemeinerten Lebesguefunktion

$$A_{n,1}(z) := \sum_{k=1}^n (z_{k-1} - z_k) \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{i!} |l_i'(z)| \quad (10)$$

erhält man dann analog zum Interpolationsfall die Abbildungsnormen

$$\|\hat{L}_{n,1}\| = A_{n,1}(z) \quad (11)$$

und

$$\|L_{n,1}\| = \max_{|z| \leq 1} A_{n,1}(z) \quad (12)$$

(vgl. [11]) sowie für $f \in C^1[-1, 1]$ die Fehlerabschätzungen

$$|f'(z) - (L_{n,0}f)'(z)| \leq (1 + A_{n,1}(z)) \cdot E_{n-1}(f'') \quad (13)$$

und

$$|f' - (L_{n,0}f)'| \leq (1 + \|L_{n,1}\|) \cdot E_{n-1}(f''). \quad (14)$$

Für beliebige Knoten gilt nach einem Satz von Berman (vgl. [12, p. 106]) die untere Schranke

$$\|L_{n,1}\| \geq \frac{2}{\pi^2} \log(n-1). \quad (15)$$

Als erster zeigte Schönhage [11], dass bei Zugrundelegen der Tschebyscheff-Extremstellen diese Schranke qualitativ scharf ist. Unabhängig von Schönhage verbesserte Haverkamp [5] diese Abschätzung zu

$$\|L_{n,1}\| \leq 4 \log n + 11. \quad (16)$$

Schliesslich veröffentlichte Haverkamp [6] kürzlich die hinsichtlich des Faktors von $\log n$ optimale Abschätzung

$$\|L_{n,1}\| \leq 2 \log n + 1, \quad (17)$$

indem er die seit längerem bekannte Vermutung bestätigte, dass die Lebesguefunktion $A_{n,1}$ bei ± 1 ihr absolutes Maximum annimmt. In der vorliegenden Arbeit geben wir einen weiteren Beweis dieser Aussage, von

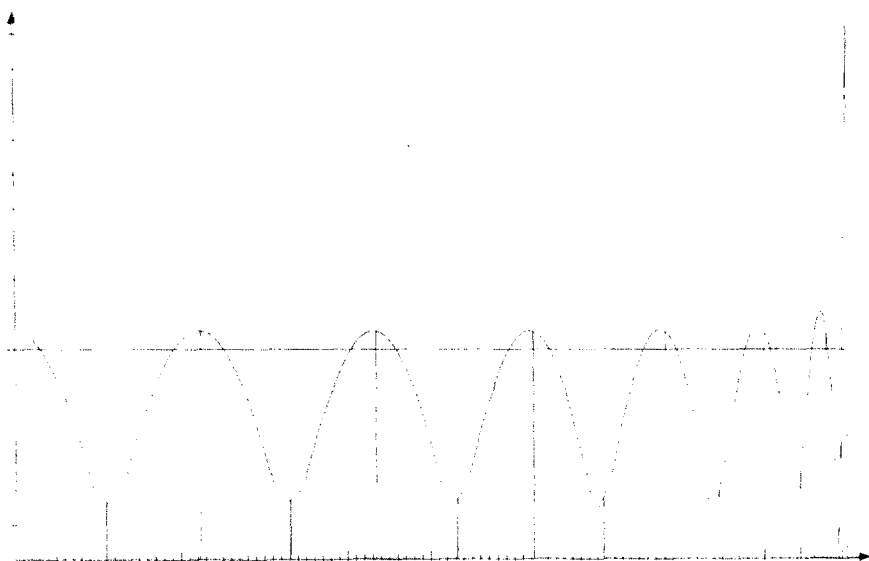


ABB. 1. Lebesguefunktion $A_{n,1}$ auf $[0, 1]$ für $n = 14$.

dem wir glauben, dass er dem Problem besser angepasst ist. Ausgehend von der trivialen Feststellung, dass $A_{n,1}$ stückweise polynomisch ist, betrachten wir die $A_{n,1}$ darstellenden Polynome und schätzen deren Betragsmaximum über $[-1, 1]$ durch $A_{n,1}(1)$ ab. Dies gelingt vor allem deshalb, weil die Lebesguefunktion im Intervall $(-\cos(\pi/2n), \cos(\pi/2n))$ klein ist gegenüber ihrem Wert bei ± 1 .

Zur Veranschaulichung der Situation zeigt Abbildung 1 den Verlauf der Lebesguefunktion $A_{n,1}$ für $n = 14$. Da $A_{n,1}$ gerade ist, genügt die Darstellung im Intervall $[0, 1]$. Die Teilstücke der Ordinatenachse entsprechen der Länge $0.1 \log n$, und die durchgezogene Horizontallinie kennzeichnet das Niveau $\log n$. In der Zeichnung sind die Extremstellen und Nullstellen von T_n deutlich hervorgehoben. Und zwar erkennt man, dass die Lebesguefunktion an den Extremstellen von T_n im Inneren von $[-1, 1]$ Fast-Maxima der Grösse $\frac{1}{2}A_{n,1}(1)$ hat. Ferner hat $A_{n,1}$ an den Nullstellen von T_n Fast-Minima, die vom Rande des Intervalls zur Mitte hin kleiner werden.

Die von uns erzielten Ergebnisse enthalten und verallgemeinern auch die von Pallaschke [8] bewiesenen Konvergenzaussagen. Der von Lorentz [7] betrachtete Fall äquidistanter Knoten lässt sich so ebenfalls sehr einfach behandeln.

2. EIGENSCHAFTEN DER LEBESGUEFUNKTION

Wie bereits erwähnt, betrachten wir ausschließlich als Interpolationsknoten die Extremstellen $z_j = \cos(j\pi/n)$, $0 \leq j \leq n$, des n -ten Tschebyscheff-Polynoms T_n , $n \geq 2$. Für die Funktion aus (2) gilt mit passendem $\alpha \in \mathbb{R}$ $\omega(z) = \alpha(1 - z^2) T'_n(z)$. Mit Hilfe der Differentialgleichung der Tschebyscheff-Polynome (vgl. [12, p. 72]) ergibt sich $\omega'(z) = -\alpha(zT''_n(z) + n^2 T_n(z))$ und

$$\begin{aligned} \omega'(z_j) &= \alpha(-1)^{j+1} 2n^2, & \text{für } j=0 \text{ oder } j=n, \\ &= \alpha(-1)^{j+1} n^2, & \text{für } 1 \leq j \leq n-1. \end{aligned}$$

Somit gilt für die Ableitungen der Lagrangeschen Grundpolynome

$$l'_j(z) = (-1)^j \left[\frac{T_n(z)}{z - z_j} + \frac{1 - z_j z}{(z - z_j)^2} \frac{T'_n(z)}{n^2} \right], \quad (18)$$

wobei im Falle $j=0$ bzw. $j=n$ auf der rechten Seite zusätzlich der Faktor $\frac{1}{2}$ auftritt.

Wir untersuchen nun desjenige Polynom, welches $A_{n,1}$ am Rande des Intervalls $[-1, 1]$ darstellt.

SATZ 1. *Bezeichnet $p_0 \in \Pi_{n-1}$ das Polynom*

$$p_0(z) = \tan \frac{\pi}{2n} \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \sin \frac{j\pi}{n} l'_j(z), \quad (19)$$

so gilt

$$A_{n,1}(z) = p_0(z) \quad \text{für} \quad \cos \frac{\pi}{2n} \leq z \leq 1.$$

p_0 hat die Darstellung

$$p_0(z) = \frac{2}{n} \tan \frac{\pi}{2n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1 + (-1)^{n+k+1}}{2} \tan \frac{k\pi}{2n} \left[z U_{k-1}(z) + k T_k(z) \right] \quad (20)$$

und nimmt genau an den Stellen ± 1 sein Betragsmaximum an.

Beweis. Zum Beweis setzen wir

$$\Phi_k(z) := \sum_{j=0}^{k-1} l'_j(z), \quad 1 \leq k \leq n:$$

wegen

$$\sum_{j=0}^n l'_j(z) = 0 \quad (21)$$

gilt

$$\Phi_k(z) = - \sum_{j=k}^n l_j'(z). \tag{22}$$

Aus (18) folgt

$$\text{sign } l_j'(z) = (-1)^j \quad \text{für } \cos \frac{\pi}{2n} \leq z \leq 1, \quad 0 \leq j \leq n.$$

Die Summanden in (22) sind somit alternierend; ferner nehmen sie mit wachsendem j betragslich ab. Mithin gilt für das Vorzeichen von Φ_k

$$\text{sign } \Phi_k(z) = -\text{sign } l_k'(z) = (-1)^{k+1}.$$

Für $\cos(\pi/2n) \leq z \leq 1$ erhalten wir also

$$\begin{aligned} A_{n,1}(z) &= \sum_{k=1}^n (z_{k-1} - z_k) |\Phi_k(z)| \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} (z_{k-1} - z_k) \sum_{j=0}^{k-1} l_j'(z) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{k=j+1}^n (-1)^{k+1} (z_{k-1} - z_k) \right) l_j'(z). \end{aligned} \tag{23}$$

Hieraus ergibt sich wegen

$$\sum_{k=1}^j (-1)^k (z_{k-1} - z_k) = \tan \frac{\pi}{2n} (-1)^j \sin \frac{j\pi}{n} \tag{24}$$

wie behauptet

$$A_{n,1}(z) = \tan \frac{\pi}{2n} \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \sin \frac{j\pi}{n} l_j'(z).$$

Wir wollen nun das Polynom p_0 mittels der Tschebyscheff-Polynome darstellen. Dazu substituieren wir $z = \cos x$, und erhalten so wegen

$$2 \sum_{k=0}^n \cos kx = \sin nx \cdot \cot \frac{x}{2}$$

für die Lagrangeschen Grundpolynome

$$\begin{aligned} l_j(z) &= \frac{1}{n} \sum_{k=0, k \neq j}^n \left[\cos k \left(x - \frac{j\pi}{n} \right) + \cos k \left(x + \frac{j\pi}{n} \right) \right] \\ &= \frac{2}{n} \sum_{k=0}^n \cos \left(k \frac{j\pi}{n} \right) T_k(z), \end{aligned} \tag{25}$$

wobei wieder für $j=0$ bzw. $j=n$ die rechte Seite um den Faktor $\frac{1}{2}$ zu ergänzen ist. Die Striche am Summenzeichen bedeuten, dass der erste bzw. letzte Summand jeweils nur mit dem Gewicht $\frac{1}{2}$ berücksichtigt werden soll. (25) ergibt dann

$$\sin \frac{j\pi}{n} l'_j(z) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-j} \left[\sin(k+1) \frac{j\pi}{n} \cdots \sin(k-1) \frac{j\pi}{n} \right] T'_k(z);$$

dies setzen wir in (19) ein:

$$\begin{aligned} p_0(z) &= \left(\tan \frac{\pi}{2n} \right) / n \sum_{k=1}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^{n-k} (-1)^i \left[\sin j \frac{(k+1)\pi}{n} \cdots \sin j \frac{(k-1)\pi}{n} \right] \right) T'_k(z) \\ &= \left(\tan \frac{\pi}{2n} \right) / n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1 + (-1)^{n-k}}{2} \left[\tan \frac{(k-1)\pi}{2n} - \tan \frac{(k+1)\pi}{2n} \right] T'_k(z) \\ &= \left(\tan \frac{\pi}{2n} \right) / n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1 + (-1)^{n-k-1}}{2} \tan \frac{k\pi}{2n} (T'_{k+1}(z) - T'_{k-1}(z)). \end{aligned}$$

Wegen

$$T'_{k+1}(z) - T'_{k-1}(z) = 2 \left(z \frac{T'_k(z)}{k} + k T_k(z) \right)$$

erhalten wir so schließlich die Darstellung (20), aus der sich sofort ergibt, dass p_0 sein Betragsmaximum genau bei ± 1 annimmt.

Als nächstes werten wir die verallgemeinerte Lebesguefunktion an den Extremstellen $z_j = \cos(j\pi/n)$, $0 \leq j \leq n$, sowie den Nullstellen $z_i^* = \cos((2i-1)\pi/2n)$, $1 \leq i \leq n$, von T_n aus.

SATZ 2.

- (a) $A_{n,1}(\pm 1) = 2 \tan(\pi/2n) \sum_{j=1}^{n-1} \cot(j\pi/2n)$;
 (b) $A_{n,1}(z_j) = \tan(\pi/2n) \sum_{j=1}^{n-1} \cot(j\pi/2n)$, $1 \leq i \leq n-1$;
 (c) $A_{n,1}(z_i^*) = (1/n) \sum_{j=1}^{n-1} \cot((2j-1)\pi/4n)$;
 (d) $A_{n,1}(z_i^*) - A_{n,1}(z_{i+1}^*)$
 $= (\tan(\pi/2n)/n) (\cot((2i-1)\pi/2n) - \cot((2i+1)\pi/2n))$
 $\times \sum_{j=1}^{n-1} \cot((2j-1)\pi/4n) > 0$
 für $1 \leq i < \lfloor n/2 \rfloor$.

Beweis. Wegen (21) gilt die Aufspaltung

$$A_{n,1}(z_i) = \sum_{k=1}^i (z_{k-1} - z_k) \left| \sum_{j=0}^{k-1} l'_j(z_i) \right| + \sum_{k=i+1}^n (z_{k-1} - z_k) \left| \sum_{j=k}^n l'_j(z_i) \right|.$$

Analoge Vorzeichenbetrachtungen wie im Beweis von Satz 1 sowie Vertauschung der Summation führen dann mit (24) zu

$$\begin{aligned} A_{n,1}(z_i) &= \sum_{k=1}^i (z_{k-1} - z_k)(-1)^{i-k} \sum_{j=0}^{k-1} l'_j(z_i) \\ &\quad + \sum_{k=i+1}^n (z_{k-1} - z_k)(-1)^{i-k} \sum_{j=k}^n l'_j(z_i) \\ &= (-1)^i \tan \frac{\pi}{2n} \left\{ \sum_{j=0}^{i-1} \left[(-1)^i \sin \frac{i\pi}{n} + (-1)^{i-1-j} \sin \frac{j\pi}{n} \right] l'_j(z_i) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=i+1}^n \left[(-1)^j \sin \frac{j\pi}{n} + (-1)^{i-1-j} \sin \frac{i\pi}{n} \right] l'_j(z_i) \right\}. \end{aligned} \tag{26}$$

Aus (18) erhält man für $i \neq j$

$$l'_j(z_i) = \frac{(-1)^{i+j}}{z_i - z_j}, \tag{27}$$

wobei auf der rechten Seite im Falle $i=0$ oder $i=n$ der Faktor 2 und im Falle $j=0$ oder $j=n$ der Faktor $\frac{1}{2}$ hinzuzufügen ist. Einsetzen in (26) ergibt

$$\begin{aligned} A_{n,1}(z_i) &= \tan \frac{\pi}{2n} \left\{ \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i-j} \frac{\sin(i\pi/n)}{z_i - z_j} - \sum_{j=i+1}^n \frac{\sin(j\pi/n)}{z_i - z_j} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=i+1}^n \frac{\sin(j\pi/n)}{z_i - z_j} - \sum_{j=i-1}^0 (-1)^{i-j} \frac{\sin(i\pi/n)}{z_i - z_j} \right\}. \end{aligned} \tag{28}$$

Mit Hilfe von

$$\frac{\sin v}{\cos u - \cos v} = \frac{1}{2} \left(\cot \frac{v+u}{2} + \cot \frac{v-u}{2} \right) \tag{29}$$

erhält man schliesslich aus (28) nach mehrfacher Anwendung von

$$\cot u - \tan u = 2 \cot 2u$$

wie behauptet

$$A_{n,1}(z_i) = \tan \frac{\pi}{2n} \prod_{j=1}^{n-1} \cot \frac{j\pi}{2n}; \quad (30)$$

gemäss der Bemerkung zu (27) ist Formel (30) in den Fällen $i=0$ und $i=n$ um den Faktor 2 zu ergänzen. Damit sind (a) und (b) bewiesen.

Wir kommen zum Beweis der beiden anderen Beziehungen. Nach (18) gilt

$$l'_j(z_i^*) = \frac{(-1)^{i \cdot j + 1}}{n \sin((2i-1)\pi/2n)} \frac{1 - z_i^* z_j}{(z_i^* - z_j)^2}$$

(mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ für $j=0$ oder $j=n$). Für $k \leq i$ ist dann

$$\begin{aligned} \Phi_k(z_i^*) &= \sum_{j=0}^{k-1} l'_j(z_i^*) \\ &= \frac{(-1)^{i+1}}{n \sin((2i-1)\pi/2n)} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \frac{1 - z_i^* z_j}{(z_i^* - z_j)^2}, \end{aligned} \quad (31)$$

und für $k > i$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \Phi_k(z_i^*) &= - \sum_{j=k}^n l'_j(z_i^*) \\ &= \frac{(-1)^i}{n \sin((2i-1)\pi/2n)} \sum_{j=k}^n (-1)^j \frac{1 - z_i^* z_j}{(z_i^* - z_j)^2}. \end{aligned} \quad (32)$$

Die Summanden in (31) und (32) alternieren im Vorzeichen und wachsen bzw. fallen betragslich. Somit ist stets

$$\text{sign } \Phi_k(z_i^*) = (-1)^{i+k}.$$

woraus

$$\begin{aligned} A_{n,1}(z_i^*) &= (-1)^{i+1} p_0(z_i^*) \\ &= \frac{\tan(\pi/2n)}{n \sin((2i-1)\pi/2n)} \prod_{j=1}^{n-1} \sin \frac{j\pi}{n} \frac{1 - z_i^* z_j}{(z_i^* - z_j)^2} \\ &= \frac{\tan(\pi/2n)}{n} \left\{ \cot \frac{(2i-1)\pi}{2n} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{\sin(j\pi/n)}{\cos((2i-1)\pi/2n) - \cos(j\pi/n)} \right. \\ &\quad \left. + \prod_{j=1}^{n-1} \frac{\sin((2i-1)\pi/2n) \sin(j\pi/n)}{(\cos((2i-1)\pi/2n) - \cos(j\pi/n))^2} \right\} \end{aligned}$$

folgt. Anwendung von (29) und

$$\frac{\sin u \sin v}{(\cos u - \cos v)^2} = \frac{1}{4} \left(\cot^2 \frac{v-u}{2} - \cot^2 \frac{v+u}{2} \right)$$

ergibt dann

$$\begin{aligned} A_{n,1}(z_i^*) = & \frac{\tan(\pi/2n)}{2n} \left\{ \cot \frac{(2i-1)\pi}{2n} \left[-\sum_{j=1}^{i-1} \cot \frac{(2j-1)\pi}{4n} + \sum_{j=1}^{n-i} \cot \frac{(2j-1)\pi}{4n} \right. \right. \\ & + \sum_{j=i+1}^n \cot \frac{(2j-1)\pi}{4n} - \sum_{j=n-i+2}^n \cot \frac{(2j-1)\pi}{4n} \left. \right] \\ & + \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^{i-1} \cot^2 \frac{(2j-1)\pi}{4n} + \sum_{j=1}^{n-i} \cot^2 \frac{(2j-1)\pi}{4n} \right. \\ & \left. \left. - \sum_{j=i+1}^n \cot^2 \frac{(2j-1)\pi}{4n} - \sum_{j=n-i+2}^n \cot^2 \frac{(2j-1)\pi}{4n} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Hiermit folgt leicht der Nachweis von (c) und (d).

3. DIE LEBESGUEKONSTANTEN

Wir kommen zum Hauptresultat der Arbeit.

SATZ 3. Die Lebesguefunktion $A_{n,1}$ nimmt ihr Maximum genau in ± 1 an. Asymptotisch gilt für die Lebesguekonstanten

$$|L_{n,1}| = 2 \log n + \varepsilon_n \quad (n = 2, 3, \dots)$$

mit $\varepsilon_n \searrow 2(C + \log(2/\pi)) = 0.2512\dots$, wobei $C = 0.5772\dots$ die Eulersche Konstante ist.

Beweis. Es sei

$$p(z) = \sum_{k=1}^n \sigma_k (z_{k-1} - z_k) \sum_{j=0}^{k-1} l_j'(z), \quad \sigma_k = \pm 1,$$

ein Polynom ungleich p_0 und $-p_0$, welches $A_{n,1}$ in einem Teilintervall von $[-1, 1]$ darstellt. Wir unterscheiden nun zwei Fälle.

Fall 1. p nehme sein Betragsmaximum in $M := \{z \in \mathbb{R} \mid z^* \leq |z| \leq 1\}$ an.

Mit der Dreiecksungleichung und Satz 1 folgt für $z \in M$

$$\begin{aligned} |p(z)| &= \left| \sum_{k=1}^n \sigma_k (z_{k-1} - z_k) \sum_{j=0}^{k-1} l_j'(z) \right| \\ &< \left| \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} (z_{k-1} - z_k) \sum_{j=0}^{k-1} l_j'(z) \right| = |p_0(z)|; \end{aligned}$$

dies ergibt $|p| < p_0(1) = A_{n,1}(1)$.

Für die Diskussion des zweiten Falles stellen wir zwei Hilfssätze bereit.

HILFSSATZ 1. *Es sei q ein reellwertiges, trigonometrisches Polynom vom Grade $\leq m$ mit $q(t_0) = |q|$. Dann gilt*

$$q(t_0 + u) \geq |q| \cos mu \quad \text{für } |u| \leq \pi/m.$$

Der Beweis beruht wesentlich auf einer Interpolationsformel von Riesz [9] (vgl. auch [12, Aufgabe 5.10]).

HILFSSATZ 2. $A_{n,1}(\cos(j\pi/2n)) \leq (1/\sqrt{2}) A_{n,1}(1)$ ($1 \leq j \leq 2n-1$).

Wegen Satz 2 genügt der Nachweis der Ungleichung

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \cot \frac{(2j-1)\pi}{4n} \leq \sqrt{2} \tan \frac{\pi}{2n} \sum_{j=1}^{n-1} \cot \frac{j\pi}{2n}. \quad (33)$$

Für $n = 2, 3, 4$ ist die Richtigkeit von (33) leicht nachzuprüfen. Für $n \geq 5$ kann man wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \cot \frac{(2j-1)\pi}{4n} &\leq \frac{1}{n} \left\{ \cot \frac{\pi}{4n} + \sum_{j=1}^{n-1} \cot \frac{j\pi}{2n} \right\} \\ &\leq \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi} \tan \frac{\pi}{2n} \sum_{j=1}^{n-1} \cot \frac{j\pi}{2n} \\ &< \sqrt{2} \tan \frac{\pi}{2n} \sum_{j=1}^{n-1} \cot \frac{j\pi}{2n}. \end{aligned}$$

Fall 2. Das Polynom p nehme sein Betragsmaximum im Intervall $(-z_1^*, z_1^*)$ an.

Mittels $q(t) := p(\cos t)$, $0 \leq t \leq \pi$, erhalten wir ein reellwertiges, trigonometrisches Polynom q vom Grade $\leq n-1$, welches sein Betragsmaximum an einer Stelle $t_0 \in (\pi/2n, \pi - (\pi/2n))$ annimmt. Ohne Einschränkung sei

$$q(t_0) = |q| = |p|.$$

Zu t_0 existiert ein j , $1 \leq j \leq 2n - 1$, mit $|(j\pi/2n) - t_0| \leq \pi/4n$. Aus Hilfssatz 1 folgt dann für $u := (j\pi/2n) - t_0$

$$q \left(\frac{j\pi}{2n} \right) = q(t_0 + u) \geq |q| \cos(n - 1)u > |p| \cos \frac{\pi}{4}.$$

Zusammen mit Hilfssatz 2 ergibt dies

$$|p| < \sqrt{2} \max_{k=1}^{2n-1} q \left(\frac{k\pi}{2n} \right) \leq \sqrt{2} \max_{k=1}^{2n-1} A_{n,1} \left(\cos \frac{k\pi}{2n} \right) \leq A_{n,1}(1).$$

Der Beweis der zweiten Teilaussage von Satz 3 basiert auf Ideen aus einer Arbeit von Cheney und Rivlin [2]. Mittels dreifacher partieller Integration lässt sich für $f \in C^3[0, 1]$ folgende Identität zeigen:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \left(\frac{j}{n} \right) - \int_0^1 f(x) dx \\ &= -\frac{f(1) - f(0)}{2n} + \frac{f'(1) - f'(0)}{8n^2} - \frac{f''(0)}{24n^2} \\ &+ \int_0^1 \frac{4(|nx| - nx + (1/2))^3 - |nx| - (1/2)}{24n^3} f'''(1 - x) dx. \end{aligned} \quad (34)$$

Wir wenden im folgenden (34) auf die Funktion

$$f(x) := \cot \frac{\pi x}{2} - \frac{2}{\pi x} = -\frac{\pi x}{6} - \frac{\pi^3 x^3}{360} - \dots \quad (35)$$

an, die in $|x| < 2$ analytisch ist und in deren Reihenentwicklung nur ungerade Potenzen mit negativen Koeffizienten auftreten. Offensichtlich ist

$$g(t) := \frac{4(|t| - t + (1/2))^3 - |t| - (1/2)}{24t^3}$$

differenzierbar für $t > 0$ mit

$$g'(t) = \frac{(j + (1/2))(t - j)(j + 1 - t)}{2t^4} > 0, \quad j < t \leq j + 1.$$

Wegen $f'''(x) < 0$ für $x \in [0, 1]$ erhalten wir so

$$R_n(f) := \int_0^1 g(nx) x^3 f'''(1 - x) dx \searrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (36)$$

Mit Hilfe von (34) und

$$-\frac{f(1)-f(0)}{2n} + \frac{f'(1)-f'(0)}{8n^2} - \frac{f''(0)}{24n^2} = \frac{1}{\pi n} - \left(\frac{\pi}{3} - \frac{2}{\pi}\right) \Big/ 8n^2$$

zerlegen wir nun

$$\varepsilon_n = |L_{n,1}| - 2 \log n$$

in die Summe

$$\varepsilon_n = u_n + 2 \left(v_n + w_n + \log \frac{2}{\pi} \right);$$

hierbei sind

$$u_n = \pi \left(\tan \frac{\pi}{2n} \Big/ \frac{\pi}{2n} \right) R_n(f),$$

$$v_n = \left(\tan \frac{\pi}{2n} \Big/ \frac{\pi}{2n} \right) \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{j} - \log n - \frac{1}{2n} - \frac{(\pi^2/6) - 1}{8n^2} \right),$$

$$w_n = \left(\left(\tan \frac{\pi}{2n} \Big/ \frac{\pi}{2n} \right) - 1 \right) \log \frac{2n}{\pi}.$$

Die Folgen (u_n) und (v_n) konvergieren für $n \geq 2$ monoton fallend gegen 0 bzw. C . Letzteres lässt sich wie folgt zeigen. Aus der Potenzreihenentwicklung des Tangens ergibt sich

$$\tan \frac{\pi}{2n} \Big/ \frac{\pi}{2n} = 1 + \frac{\pi^2}{12n^2} + r_n$$

mit

$$r_n \searrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{und} \quad 0 \leq r_n \leq \frac{16}{15n^4}.$$

Ferner gilt nach der Euler-Maclaurinschen Formel

$$C = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} - \log n - \frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2} - \tilde{r}_n \quad \text{mit} \quad 0 \leq \tilde{r}_n \leq \frac{1}{120n^4}.$$

Man erhält so die Darstellung

$$v_n = C(1 + r_n) + \left(\frac{\gamma}{n^2} + \rho_n \right) \quad (37)$$

mit

$$\gamma = 0.31 \dots \quad \text{und} \quad |\rho_n| \leq \frac{1}{5n^3},$$

aus der leicht

$$v_n \searrow C \quad (n \rightarrow \infty)$$

folgt.

Es bleibt abschliessend die Folge (w_n) zu untersuchen. Diese konvergiert erst ab $n=3$ monoton fallend gegen 0. Zusammen mit $\varepsilon_2 = 2(1 - \log 2) > \varepsilon_3 = 2(\frac{4}{3} - \log 3)$ ergibt dies, dass die Folge (ε_n) monoton fallend gegen den Grenzwert $2(C + \log(2/\pi))$ konvergiert.

LITERATUR

1. L. BRUTMAN, On the Lebesgue Function for Polynomial Interpolation, *SIAM J. Numer. Anal.* **15** (1978), 694–704.
2. E. W. CHENEY AND T. J. RIVLIN, A Note on some Lebesgue Constants, *Rocky Mountain J. Math.* **6** (1976), 435–439.
3. H. EHLICH UND K. ZELLER, Auswertung der Normen von Interpolationsoperatoren, *Math. Ann.* **164** (1966), 105–112.
4. P. ERDÖS, Problems and Results on the Theory of Interpolation II, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **12** (1961), 235–244.
5. R. HAVERKAMP, Approximationseigenschaften differenzierter Interpolationspolynome, *J. Approx. Theory* **23** (1978), 261–266.
6. R. HAVERKAMP, Approximationsfehler der Ableitungen von Interpolationspolynomen, *J. Approx. Theory* **30** (1980), 180–196.
7. R. A. LORENTZ, Convergence of Numerical Differentiation, *J. Approx. Theory* **30** (1980), 59–70.
8. D. PALLASCHKE, Konvergenz optimaler Differentiationsformeln, *Numer. Math.* **27** (1977), 421–426.
9. M. RIESZ, Eine trigonometrische Interpolationsformel und einige Ungleichungen für Polynome, *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein* **23** (1914), 354–368.
10. T. J. RIVLIN, "The Chebyshev Polynomials." Wiley, New York/London, 1974.
11. A. SCHÖNHAGE, Lebesguekonstanten bei numerischer Differentiation, *Math. Z.* **94** (1966), 79–83.
12. A. SCHÖNHAGE, "Approximationstheorie," de Gruyter, Berlin/New York, 1971.